

Grandeurs et mesure

Mercredi 24 novembre 2010

Compte-rendu

Présentation : François Boule, professeur agrégé en mathématiques

Les activités géométriques peuvent se dérouler sans instrument de mesure.

Renvoi à ce qu'a établi Piaget sur la construction des grandeurs (progression du C1 au C3) : cela se construit peu à peu et certaines sont d'un accès plus difficile que d'autres. Ex. La construction d'une longueur est relativement plus accessible quoique le fait de repérer un objet selon différents angles de vue ou à une certaine distance modifie la perception que l'on en a. Donc, la construction de l'espace dans ce domaine-là est liée au recollement de ces différentes perceptions d'un même objet.

En tous cas, en ce qui concerne les aires, volumes et capacités, Piaget dit que les comparaisons directes sont moins faciles. La multiplication des critères ajoute une difficulté qui n'est pas aisément franchissable pour les volumes avant 10-12 ans. Cf. la conservation des quantités discontinues. Quand on a un contenant dans une bouteille et quand on a des petits verres, on sait (en tant qu'adulte) que le volume ne change pas en dépit de l'apparence. L'enfant, lui, est attiré par une dimension plutôt que par l'autre donc il n'a pas spontanément l'idée de conservation. On peut voir cette idée de conservation pour des aires ou pour des volumes. C'est quelque chose qui apparaît on ne sait pas exactement quand ni comment, enfin, surtout comment. Lorsqu'elle apparaît, elle est considérée comme un acquis et de manière définitive. Du coup, on oublie qu'on a pu douter de la conservation auparavant.

→ Ce phénomène-là est à mettre en perspective dans le développement des apprentissages parce que :

La notion de mesure est une notion abstraite par rapport à l'objet perçu. Par ex., la notion d'aire se distingue nettement de la notion de surface ; la surface, c'est un objet qu'on voit, qu'on observe (qu'on peut toucher) tandis que l'aire est un invariant associé à plusieurs surfaces (c'est ce qui ne change pas quand on découpe et qu'on recolle une surface). Donc l'aire est un invariant, notion plus abstraite que lorsque la notion est induite par rapport à l'objet lui-même. Même chose en ce qui concerne les volumes. Au point de vue conceptuel, les notions de mesures liées à des volumes ou des aires sont plus difficilement accessibles que pour les longueurs ou les grandeurs à une dimension (notions de poids, masse, temps). Ces dernières suscitent toutefois d'autres difficultés car la perception directe ou la comparaison sont plus difficiles.

La construction de la notion de grandeurs et mesures

Renvoi au schéma et à l'ouvrage de Nicolas Rouche, *Construction du concept de grandeur et de mesure*.

Schéma grandeurs et mesure

Lorsqu'il s'agit de mesure, on part de la comparaison de plusieurs objets. Ex. instrument : la longueur d'une feuille de papier pour mesurer la largeur de la salle. Soit on dispose de plusieurs exemplaires → on les met bout à bout. Soit on dispose d'un étalon (un exemplaire) à partir duquel on fabrique des unités en reportant cet étalon gradué (une ficelle par exemple) qui permettra d'éviter des reports interminables et de réduire les erreurs possibles. Quand il s'agit de mesure réelle, la notion la plus importante est celle de l'encadrement. Il est rare de trouver un nombre entier (cela ne tombe pas juste). Les élèves du C2 peuvent commencer à y être habitués (parallèle avec le calcul approché).

Même éducation pour les mesures :

- Les moyens de calculer exactement
- Pour les besoins de la vie sociale ordinaire
- A titre de moyen dans la résolution de problème ou dans la vie scolaire

→ C'est le développement de procédures de calcul approché qui sont beaucoup plus utiles quotidiennement que le calcul exact.

Sur le schéma :

Comparaison directe, puis

Définition d'une unité qui dépend de la nature des objets à mesurer (unités d'usage)

Utilisation d'un instrument de mesure qui dépend également de ce qu'on veut mesurer (raisons pratiques) et il est intéressant, à l'école, de construire des instruments adaptés pour en faire comprendre l'usage et parce que, dans la vie courante, on n'a pas toujours l'instrument utile à disposition (ex. d'utilisation de la feuille de papier).

→ La construction et l'usage des instruments de mesure peut être une pratique scolaire intéressante.

Lié à l'établissement de mesures, nous avons la construction des fractions et des décimaux : conçue pour obtenir une précision aussi grande que possible à l'intérieur de la graduation en unités entières. C'est une 3^{ème} difficulté qui se présente à propos des mesures : la manipulation. La construction basée sur les mesures de longueurs est probablement celle qui a le moins d'inconvénients, plutôt que le partage des camemberts. Le partage en parts de même volume d'une surface donnée.

Ordres de grandeurs : ils interviennent de 2 façons dans les apprentissages scolaires → procédures de vérification, de contrôle, de calcul mais aussi des procédures de contrôle en ce qui concerne les ordres de grandeurs d'une mesure (ex. objets pour avoir des analogies assez efficaces : parties du corps humain). Le fait d'avoir une idée sur l'ordre de grandeur est quelque chose qui est peu accessible : imaginer des activités qui ont pour fonction de mettre à portée, d'avoir des idées sur l'ordre de grandeur des longueurs, durées, masses (phénomènes physiques faciles à évoquer). Au niveau des durées, il s'agit également de durées historiques, géologiques, astronomiques ou des micro-durées.

Définition de l'unité de longueur ou de temps. Définition très peu accessible. Ce n'est pas à développer au C3, mais il est bon de regarder comment les unités de grandeurs ont été définies à travers l'histoire (de quelle façon, cela a été défini sous l'Ancien Régime). Auparavant, on ne définissait pas les longueurs de la même façon en Bourgogne, Ile-de-France, Champagne, Picardie... On ne définissait pas avec les mêmes unités les mesures d'aires pour les champs cultivés, vergers, terres en friches... La Révolution Française a donc essayé d'unifier le système, avec difficulté. Le système en usage n'est entré dans les mœurs que presque un siècle après. Les mesures de temps persistent. Talleyrand a défendu le système métrique y compris pour les mesures de temps (ça n'a pas fonctionné pour ces dernières puisqu'on est toujours avec des nombres sexagésimaux). Cf. ouvrage de Denis Gedge sur la mesure de la terre.

L'unité de longueur actuelle (le m) passe par l'unité de mesure de vitesse et par la définition de la vitesse de la lumière. L'unité première, c'est l'unité de temps, puis vient l'unité de vitesse ce qui permet de définir une longueur (depuis les années 60).

Dans la suite du schéma, les questions du mesurage. Mesures concrètes avec des instruments = définition de l'encadrement sur des objets précis dans différentes grandeurs. En ce qui concerne les aires, un certain nombre de formules sont au programme du C3.

On s'intéressera d'abord aux mesures de longueurs puis les aires, et quelque peu les volumes, poids et durées.

Les mesures dans tous leurs états (pas seulement d'ordre physique) = objet d'étude. Ex. un des objets est de voir toutes les mesures qui se rapportent au corps humain (taille, poids, volume, surface, tout ce qui concerne les mesures liées à l'habillement, au sang, toutes sortes de mesures biologiques, mesures liées à l'anthropométrie, à la santé...). Ce sont des mesures dont on peut donner une idée. On peut aussi lier aux anciennes mesures liées au corps humain (pied du roi, pouce, empan, paume, coudée...). On les retrouve dans les constructions des cathédrales. Les rapports entre ces différentes unités et le lien les unes aux autres sont intéressants (l'empan, le pouce avec ses sous-unités : ligne = épaisseur d'un grain d'orge, poing →

encore en usage dans l'imprimerie...). Persistance de certaines unités de mesure (le mille nautique, la lieue, le carat...) avec le système décimal actuel et les mesures récentes.

Pour **les mesures de longueurs**, on peut partir d'un objet simple à reproduire à peu près du même ordre de grandeur que celui qu'on veut mesurer. Ex. longueur d'une table. Etablir un objet donné et le reporter. On fait des encadrements. Attention : erreur systématique importante quand l'unité est trop petite parce qu'il y a perte de précision. Le plus simple, c'est établir une graduation. Deux encadrements différents permettent d'avoir un intervalle plus précis (ex. pied et crayon). Comment faire pour aller plus loin ? → Utiliser les 2 objets : un grand (moins de report, donc moins d'erreur systématique) et un plus petit. Ex. 5 pieds + entre 2 et 3 crayons à condition qu'il y est un rapport simple (5 pieds = 13 crayons). Il n'y a pas de rapport simple entre pied et crayon ($5 \neq 13$). Pour avoir une coïncidence exacte, il faut aller plus loin. Faire une série de pieds et de crayons aussi longues que possible et regarder à quel moment il y a coïncidence. D'où l'idée de définir des unités et sous-, sur- unités avec des rapports simples. Sous l'Ancien Régime, rapports de 10 ou de 12.

Le système métrique décimal a voulu apporter une simplification définitive en prenant, comme pour la numération, des unités et sous-unités en base dix.

A partir de la définition de la construction d'un système de mesure de longueur, on passe aux unités usuelles. Il est important de développer l'intériorisation des unités d'usage au C3 et l'estimation des longueurs (on peut déjà commencer au C2). Il est nécessaire pour la vie courante et scolaire d'avoir des points de repères assez précis et nombreux concernant les unités d'usage (mètre, cm, ml, km). Avoir des repères physiques ou corporels ou liés à la vie courante. Se donner des comparaisons, des éléments de repères avec des objets de la vie courante (hauteur table, longueur et largeur d'une feuille A4, épaisseur d'une feuille de papier, largeur d'un ongle, hauteur du mur du sol au plafond, de la porte, diamètre d'un fil électrique, carreaux (carrelage) : 10 x 10, 30 x 30...) qui permettent ensuite d'estimer des longueurs. Ex. estimation de la hauteur du plafond de la salle des fêtes = 6 m. Il faut ainsi disposer d'un petit nombre de points de repères qui ne sont pas farfelus et se poser des questions qui peuvent être inattendues pour mettre en œuvre ces points de repères. Ex. estimer la longueur du couloir, hauteur d'un bâtiment, longueur de cour, longueur d'un terrain de foot... → intériorisation des unités d'usage et estimation dans des circonstances liées à la vie courante.

Les mesures d'aire sont psychologiquement plus difficiles à établir dans la mesure où la comparaison directe est en général plus difficile.

Le principe important, fondamental, qui préside aux comparaisons de surfaces et qui va permettre de définir ce qu'est une aire, c'est on ne modifie pas une aire quand on découpe et qu'on recolle les mêmes morceaux d'une surface. Ex. du puzzle. L'aire est un objet abstrait par rapport à l'objet concret qu'est la surface.

Le fait de partir de mesures d'aires permet de balayer une très grande partie de la géométrie du C3 et du collège. L'établissement des démonstrations est un point de vue opératoire pour des élèves de C3. La géométrie par étymologie procède par arpentage (créée par les Egyptiens à cause des crues du Nil il y a 3000 ans). On peut donner les prémices des démonstrations qui auront lieu au collège en manipulant des puzzles. Le puzzle contient tous les éléments d'une démonstration complète. Le capital d'expériences, de manipulation de surfaces amenant des observations et des conclusions ou des hypothèses sur des conclusions est un terrain d'expériences à développer au C3.

Ex. d'application simple liée aux mesures d'aires : planche à clous ou géoplan.

Schéma du géoplan en **annexe 1**.

Manipuler, fabriquer des figures avec un élastique. Reporter sur un papier (sur lequel la position des clous est reproduite à l'échelle 1) au fur et à mesure de la création de figures pour en garder la trace (possibilité de superposer). Pas le droit de croiser l'élastique. Ex. de figures constituées : on ne peut construire qu'1

rectangle, 3 carrés différents, 2 parallélogrammes, 2 trapèzes et un certain nombre de triangles sur la planche à 9 clous. Quels sont tous les triangles qu'on peut fabriquer dans l'espace de cette planche à 9 clous ? Il doit y en avoir 7. On peut essayer de faire un classement (au moins 2 critères : triangles rectangles ou non, isocèles ou non). Ensuite, on peut comparer ces triangles du point de vue de leur aire. Il y a des triangles manifestement plus grands que d'autres dans la mesure où ils peuvent les cacher complètement. Mais la superposition seule ne permet pas complètement de comparer.

Ex. les petits triangles A et B ne sont pas directement superposables. Donc, pour les comparer, il faut juxtaposer 2 triangles A ou 2 triangles B de manière à obtenir un parallélogramme. Si l'on coupe ce parallélogramme sur l'une ou l'autre de ses diagonales, on obtient deux triangles A ou deux triangles B. Donc, comme ils ont un multiple commun, les 2 triangles ont la même aire. Ce système est un système de comparaison avec un intermédiaire sans formule (le parallélogramme). Si on prend 2 triangles A assemblés différemment, on reconstitue un carré qui est le carré de base de la planche à clous (unité de base). Par conséquent, l'aire du triangle A et du triangle B, c'est $\frac{1}{2}$. A partir de cela, calculer l'aire de toutes les autres figures de la planche à clous.

→ Pour comparer des surfaces et obtenir leur aire, on peut les décomposer et les recomposer (ou inscription dans un rectangle, puis on enlève des morceaux).

Attention à ne pas croiser l'élastique parce que les sommets ne sont pas forcément des clous → problème infranchissable.

On fait admettre aux élèves que la formule mesurant l'aire d'un rectangle, c'est longueur x largeur. En fait, c'est une manière de définir la multiplication. La question qui est facile à admettre pour les élèves mais qui doit poser problème aux adultes, c'est que, si ce n'est pas un nombre entier, ça ne va pas de soi et il y a une démonstration à faire. L'extrapolation consiste à dire « même si ce ne sont pas des nombres entiers, la formule est la même » et elle est aussi facile à accepter que le principe d'extrapolation (pas forcément à 3-4 ans, mais au C3, oui).

Pause

Utilisation de la planche à 16 clous qui amène des figures plus compliquées ou qui pose d'autres questions (2 carrés de plus qu'avec la planche à 9 clous). Autre matériel équivalent : prendre 5 carrés de même taille, les découper en joignant un sommet au milieu d'un côté non adjacent. On obtient un triangle rectangle et un trapèze = 5 triangles et 5 trapèzes. Avec les 10 morceaux obtenus, construire un carré. C'est un puzzle. La solution n'est pas sans rapport avec le nombre d'or.

Ex. de géométrie : gâteau à partager en 3 parties (on suppose que l'épaisseur est constante). Partager en 3 parties de même aire.

Schéma géométrie friande.

Peut-on faire un partage équitable et justifié ?

Tout ce que l'on peut tirer des mesures d'aires au C3 :

Schéma aires en **annexe 2**.

De la formule de l'aire du rectangle, on obtient la formule du triangle rectangle. On passe ensuite au parallélogramme.

Comparaison de 2 rectangles (rectangle R1 et carré R2).

Aire et périmètre :

Schéma aire et périmètre en **annexe 3**.

Au C3, on rencontre souvent une confusion entre la notion d'aire et le périmètre.

Les évaluations de CM2 montrent assez classiquement des confusions des deux notions ou des erreurs concernant les unités, les mesures d'aire et périmètre. Ce type d'erreur provient du fait qu'on les enseigne assez souvent en même temps à l'école (fin printemps). Il y a une sorte de collusion dans le temps pédagogique. Dans la vie courante, on calcule beaucoup plus des aires que des périmètres. L'intérêt pratique du périmètre est limité.

Donc il faut dissocier dans le temps l'abord de ces 2 notions et trouver quelques expériences cruciales qui permettent de distinguer que les choses ne fonctionnent pas de la même façon. L'idée fautive qui se développe chez les élèves est que périmètre et aire grandissent de façon concomitante.

Ex. avec une feuille de papier A4. Son périmètre peut augmenter indéfiniment mais l'aire reste la même. Ex. de la boucle en ficelle (1 m de circonférence) avec 4 épingles qui permettent de construire des contours rectangulaires. Dans cet exemple, le périmètre est constant et l'aire varie dans une certaine limite.

Schéma périmètre du cercle et aire du disque : la découverte de Pi en [annexe 4](#).

Utiliser un disque monté sur un manche que l'on fait rouler.

En ce qui concerne les instruments de mesure, on peut utiliser les fonds de pizzas. Avec le fond de pizza, on peut établir un rapporteur (graduation de 0 à 360 et seulement ça) transparent. Ex. pour chercher à quelle distance se trouve le bâtiment en face de l'école. On triangule.

Ce qui est important, c'est l'idée d'ordre de grandeur et le fait que l'effet de zoom est le fondement de la mesure (quand on passe d'une unité à une sous-unité).

Champ d'activités lié aux **mesures de volume** :

A partir d'objets simples (emballages, boîtes de formes différentes), on peut mesurer les dimensions et calculer les volumes. La géométrie des mesures est un champ fructueux pour faire la jonction entre situations manipulables et problèmes.

Schéma des boîtes en [annexe 5](#).

Je veux une boîte qui contienne un litre, quelle feuille (carton) dois-je prendre ? J'ai une boîte dont je connais le développement, quel est le volume qu'elle contient ? ... Ce travail donne l'intuition de la construction d'un volume.

Il est difficile d'estimer des poids et de les comparer parce qu'il est difficile de faire abstraction de ce que l'on voit, de ce que l'on touche et du volume, de même pour les capacités. Ex. avec une boule de pétanque (750 g) dans une main et dans l'autre un livre. Avoir quelques points de repères.

Les questions de **durée** :

Ici aussi, les estimations sont difficiles. Le point de repère le plus commun est le pouls (bat à peu près à la seconde). Pour les élèves de C3, il est intéressant de se pencher sur la définition du temps (social, ordinaire) et, éventuellement, à travers les âges. Lien entre durée et longueur avec le GPS actuel.

Conclusion :

Les grandeurs et les mesures développent des champs variés au C3. On peut faire allusion à certaines choses (sans les détailler) mais beaucoup de situations concrètes de manipulation doivent conduire à des intuitions liées aux mesures, aux grandeurs et aux ordres de grandeurs.