

# **Apprendre l'arithmétique**

## **Les tout-petits**

### **L'acquisition du nombre de 3 à 6 ans**

**Michel Fayol**

**25 mai 2011 à Nailly**

#### **Introduction**

Après avoir passé 12 ans en tant qu'instituteur dans la ville de Meaulnes, M. Fayol fut IEN puis chercheur en université. Il a notamment mis en place des expérimentations dans le cadre de ses recherches dans des circonscriptions de la ville de Dijon. Il s'est également occupé, dans cette même académie, des cursus de psychologie et de sciences de l'éducation.

Ses recherches ont notamment porté sur les GS (appui sur la recherche fondamentale, lien avec l'IREDU).

Dans un premier temps, il sera fait état du panorama des questions qui se posent sur cette question de l'apprentissage de l'arithmétique.

Ensuite, pourquoi s'intéresse-t-on à l'arithmétique en maternelle ? A cela trois raisons : liées aux comparaisons internationales, liées à l'état de la recherche, liées aux évolutions de la société.

Enfin, les problèmes soulevés par l'acquisition de l'arithmétique et ensuite par les apprentissages seront évoqués.

#### **1) Pourquoi la question se pose-t-elle ?**

On trouve une convergence d'arguments.

→ Les évaluations internationales PISA

C'est issu d'un travail réalisé aux EU dans les années 90. Prenons les résultats de 2003 : comparaisons internationales (pays de l'OCDE) concernant le niveau en mathématiques des élèves de seconde (15 ans). On observe 7 catégories depuis les plus faibles aux très bons niveaux. En Occident, une proportion importante d'élèves se situe dans les deux niveaux les plus faibles. On trouve deux fois plus d'élèves très faibles en Occident que dans les pays d'Asie du SE. 10 % des élèves se situent dans l'élite contre 30 % pour l'Asie du SE. Depuis 1980, on sait que les meilleurs des élèves de l'Occident ont des résultats égaux aux élèves les moins performants en Asie du SE. L'Occident a donc des performances très nettement inférieures à celles de l'Asie du SE.

A cela, des raisons diverses : liées à des phénomènes culturels (jeux, échanges qui valorisent les acquisitions arithmétiques), liées à des langues qui favorisent cet apprentissage.

- Notre société et ses changements

Ensemble de phénomènes qui se sont amplifiés. Les enfants actuels ont de moins en moins de contact avec les activités arithmétiques dans la vie quotidienne (ex. la monnaie est en train de

diminuer en fréquence d'utilisation ; le pré-emballage évite de calculer ; dénombrer des objets est devenu rare ; les échanges au moment du paiement se font avec des systèmes qui impriment directement).

Mais faut-il scolariser à la maternelle des choses qui apparaissaient dans la vie quotidienne il y a 30-40 ans ? La réponse est oui.

- L'école, elle-même, a beaucoup changé.

On assiste de plus en plus à une prise en charge des individus en tant qu'individu. C'est une conception qui s'est généralisée en Occident (individualisation généralisée).

L'école a le souci :

d'assurer la promotion de chaque individu

d'amener tous les enfants à un niveau minimal de performances

et de prendre en charge des handicaps, dont les troubles du calcul.

C'est ainsi qu'une prise de conscience de l'importance décisive des premières années (comme dans les pays nordiques, EU, Angleterre) amène à penser que par des activités qui peuvent être très spécifiques on peut avoir des effets sur le long terme. Ex. programmes d'aides dans les pays anglo-saxons (AIDSTART) qui ont été évalués : effet modeste à court et moyen terme. Ceux qui ont suivi ces programmes ont, par contre, une réussite professionnelle meilleure que les autres. Ce serait donc favorable au développement ultérieur.

- La recherche.

Il existe beaucoup de pays où on ne scolarise pas dans le sens où nous l'entendons en France. Il faut mettre en place des activités arithmétiques dès la maternelle. L'arithmétique possède une mosaïque de dimensions. On trouve des capacités élémentaires très diverses selon les individus. Il faut réduire les différences interindividuelles et les difficultés spécifiques.

On peut ainsi influencer sur les performances ultérieures. Pour ce faire, il convient de comprendre les facteurs pour mettre en place des activités favorables.

En somme, on constate un retard de performances arithmétiques chez les Occidentaux. Il faut mettre en place des activités très tôt et agir sur les individualités.

## **2) Comment la question se pose-t-elle ?**

Qu'est-ce que l'arithmétique ?

Deux grandes dimensions :

- Dimension analogique : capacité perceptive, très précoce et primitive qui serait biologiquement déterminée et serait universelle et permettrait à tous les humains de traiter les quantités quelles qu'elles soient. De type approximatif (pas évaluation précise).
- Dimension symbolique, culturelle (différente donc d'un pays à l'autre) qui amène à traiter les quantités de manière précise.

Comment mettre en relation les deux et les développer toutes les 2 ? Ex. →

- Traitement analogique : il concerne toutes les dimensions quantifiables (luminosité plus intense qu'une autre, longueur, bruit, surface... sur des quantités continues). Ce sont des

capacités de base qui sont analogiques parce qu'on les perçoit. Cela vaut également pour les quantités discontinues (foule, billes... tout ce que l'on peut dénombrer).

Comparer des quantités : demander quelle est la collection où il y en a le plus.

→ Capacité de réaliser une évaluation approximative. Met en évidence un effet de distance : la distance entre deux collections est plus facile quand elle est grande. Quand les différences (distances) sont très faibles, on obtient des erreurs nombreuses. Ceci est vrai même quand il n'y a pas de numération verbale. Cette capacité s'affine de manière très importante avec l'âge (évolution importante justement entre 3 et 6 ans). Période maternelle : effectuer des comparaisons a un sens parce que ça aidera les enfants à affiner les capacités biologiques. Nous trouvons cette capacité dans toutes les cultures.

Dès la naissance, les enfants sont capables d'effectuer des comparaisons (et ce que fait ajouter, réduire, réunir, enlever, dissocier, partager (pas des opérations !)). On doit pouvoir percevoir les transformations. Il ne s'agit pas encore d'opérations arithmétiques : percevoir qu'on a ajouté quelque chose, enlevé, réuni, dissocié, partagé, répété et que, quand on a une première quantité et une deuxième, ce à quoi on aboutit selon que l'on ait ajouté ou enlevé fait que cela donne une quantité résultante différente des deux précédentes.

Cette capacité de comparaison, de discrimination et de perception des transformations est fondamentale pour que l'arithmétique puisse se greffer sur elle.

- Dimension symbolique : aucun animal, ni aucun nouveau né n'est capable de le faire.

Cette dimension apparaît vers 18 mois : capacité à traiter des symboles qui tiennent lieu de quantité. Donc, au lieu de travailler sur des vraies quantités, on va travailler sur ce qui les représente.

Les symboles fonctionnent toujours par système. Les systèmes symboliques sont toujours des codes, fonctionnent dans des systèmes sociaux et ont leurs propres caractéristiques et contraintes. On a une foule de systèmes : les mots, les chiffres arabes, les encoches, les bâchettes, les bouliers, les doigts...

Ex. avec les chiffres romains. Si on devait faire une multiplication avec ces chiffres, on éprouverait de grandes difficultés alors qu'avec les chiffres arabes, c'est très facile même s'il y a des choses à apprendre.

Les difficultés des enfants sont moins sur le sens que sur le code utilisé : ce qui est difficile c'est la mise en relation entre la représentation analogique et la représentation symbolique. L'apprentissage doit résoudre ce passage de l'analogique au symbolique et permettre d'aller très vite du symbolique à l'analogique → l'école maternelle est confrontée à cet apprentissage. Certains codes sont plus pertinents pour l'apprentissage.

### **3) Problèmes soulevés par l'acquisition de l'arithmétique**

Trois difficultés potentielles : la représentation analogique, le problème des codes et de leurs usages, la relation entre les deux représentations (la plus complexe).

Ex. avec des enfants de 5 ans : même situation numérique avec 4 versions différentes. Ajout de pingouins ou retrait dans une boîte à chaussures....

- Utilisation d'un système non verbal : pas de différence entre les enfants issus d'un milieu favorisé et ceux issus d'un milieu défavorisé.

- Le système qui raconte une histoire : baisse de performance pour tous les enfants et notamment pour ceux d'un milieu défavorisé.
- Même chose avec les objets.
- Idem avec l'abstrait. Dès qu'on recourt au verbal, chute de performance parce qu'il est difficile de passer du code à une interprétation analogique. Cela suppose un travail continu sur des quantités toutes petites puis de plus en plus grandes.

Quand on travaille avec des nouveau-nés, ils différencient un de deux et deux de trois. Ils différencient des collections quand le rapport est de 1 à 12 (16-32, 12-24...). Ils discriminent de grandes quantités de manière imprécise. Ils comprennent ce que sera le résultat d'un ajout ou d'un retrait. Ils sont sensibles aux transformations qui portent sur des grandes quantités.

### Le passage au symbolique

Difficulté d'acquisition de la représentation verbale.

Cartes avec 2 ou 3 ballons → les enfants de 2 ans ½ échouent sur 2 contre 3, 3 contre 4.

L'évolution des performances est très lente. Vers deux ans, l'enfant différencie 1. La difficulté vient de la relation entre 1, 2, 3. Quand ils arrivent à 4, les enfants saisissent le principe de succession.

Qu'est-ce qui rend le code verbal si difficile ? Faire la différence entre le code du début jusqu'à 10 et le code ultérieur.

-On code la quantité par l'ordre : l'ordre des chiffres est une façon de parler de la quantité et c'est difficile à comprendre pour les enfants (pas de sens numérique pour eux quand ils récitent la suite verbale). Savoir à quoi correspond l'ordre.

-La deuxième difficulté tient à la catégorisation : proposer des situations qui permettent aux enfants de comprendre que le cardinal est indépendant des caractéristiques de ce qui est compté.

Ex. enfants de 7-8 ans : comparer des quantités physiques, des collections, et avec des chiffres (les faibles calculateurs ont des difficultés sur les chiffres arabes, pas sur le reste). Trouver des activités qui permettent des mises en relation.

Que peut-on faire ? Un jeu efficace est le jeu de l'oie mais sous forme de tableau linéaire et non circulaire avec un dé de 1 ou 2. Jouer par deux pour qu'ils voient comment s'effectue l'avancée de 1 à 2 de 3 à 4...

Quand on utilise ce genre de matériel (MS-GS), on observe que les enfants aiment bien jouer mais surtout les évaluations sur la ligne numérique se linéarisent (intègrent après le jeu la notion de distance, que 5 est plus grand que 4 et amélioration des performances en comparaison).

### Bilan

Les difficultés majeures tiennent à la relation entre codes et quantités dans les 2 sens.

Le jeu induit une amélioration des performances.

S'interroger sur la pertinence des codes (le code verbal est le plus compliqué). Des outils intéressants sont les doigts, dominos. Les chiffres arabes sont à utiliser précocement : l'environnement culturel des enfants est rempli de chiffres arabes.

### Le dénombrement : une activité à plusieurs composantes

Dénombrer, c'est passer à un code symbolique, c'est-à-dire partir d'une quantité d'éléments et essayer d'associer à cette quantité une forme symbolique.

Activités qui vont au-delà de 4-5. A nouveau, c'est un objet de difficulté.

Dimension motrice (pointage, mouvement des yeux...)

Composante symbolique (nom des nombres, chiffres arabes, formes signées)

Possible coût de cette coordination qui s'ajouterait au coût de chacune des deux composantes.

Quel impact chez les enfants TSL (troubles du langage) ou dyspraxiques ? Trouver un code compatible avec ces difficultés de langage.

A partir de 4 et 5, on dénombre. C'est soumis à des principes. Il faut que le dénombrement respecte 5 principes :

- Une correspondance stricte entre mots et objets à dénombrer
- Un ordre stable des éléments servant à désigner
- Le dernier élément correspond à la cardinalité (ensemble de la collection)
- L'abstraction (aucun impact sur la quantité elle-même) : l'objet lui-même n'a pas d'importance
- Une non pertinence de l'ordre du traitement (le sens de comptage de la quantité est identique quel que soit l'ordre dans lequel on dénombre)

La procédure canonique : partir d'une extrémité pour aller à une autre. Dès 3 ans, les enfants ont une idée précise de la manière dont ça doit être conduit.

Demander de dénombrer pour obtenir une collection donnée : « donne-moi 5 objets ».

Jeu de la marionnette pour maîtriser l'ordre stable, la cardinalité, la correspondance terme à terme et la mise en œuvre de l'ensemble. Ex. La marionnette va dénombrer des collections en se trompant de temps en temps. Les enfants doivent dire quand elle se trompe et dire ce qu'elle aurait dû faire. → Les enfants rejettent très tôt quand les mots sont oubliés, quand il y a un mot en trop, quand il y a un double comptage. La comparaison entre les enfants de trois et cinq ans nous montre qu'il s'agit néanmoins d'un apprentissage.

Capacité des enfants à comprendre qu'on n'est pas obligé d'utiliser un dénombrement canonique.

Compter les ronds rouges au milieu d'une multitude de ronds de couleurs diverses.

Suggestions :

Enseigner explicitement les principes du dénombrement

Inciter à la planification et au contrôle du dénombrement

Isoler des blocs d'éléments.

### Le code verbal et ses difficultés

Il existe des cultures dans lesquelles il n'y a pas de code verbal (ex. des tribus Piraha et Mundurucu en Amazonie qui ont le 1, le 2 ; après c'est « beaucoup »).

Notre système numérique possède un lexique puis on a utilisé des combinatoires qui s'appuient sur des bases (en France, nous avons 3 bases : base 10 qui commence à 17, une base vingt (d'où 80 : 4 x 20) et un résidu de base 60) et nous avons une combinatoire qui repose sur la structure additive (36 : deux mots – une addition) et la structure multiplicative (80 : deux mots mais une multiplication). Notre système verbal est donc difficile car, par exemple, rien ne se voit dans le mot cinq par rapport au mot quatre. Ce n'est pas la longueur des deux mots qui nous donne des indices mais parce que 5 vient après 4 dans la liste. C'est un codage verbal de la quantité par l'ordre.

Ex. des systèmes d'Asie du SE où l'apprentissage du code est plus rapide et plus efficace.

Situation critique en France : l'irrégularité ralentit et fragilise l'apprentissage.

La mémoire à court terme dépend de la vitesse à mémoriser les noms de nombre : mémoire plus large chez les Chinois que chez les Gallois et Anglais ou Français.

Représentation indo-arabe (code d'une grande simplicité et d'une grande efficacité).

Le système oral induit des erreurs : il faut consacrer du temps à la relation entre l'oral et le code indo-arabe.

Que faire à la maternelle ?

La référence à l'oral est problématique : essayer un système sans référence à l'oral (pour commencer) ?

Les plus jeunes enfants peinent à comprendre la symbolisation de la quantité (ex. ils utilisent 3 fois le chiffre 3 pour écrire 3)

Problème de la frise des jours qui intègre la dimension ordinale mais pas cardinale.

Les opérations : activités qui représentent des situations problèmes

Les enfants comprennent dès les premiers mois après leur naissance que quand on ajoute quelque chose à une quantité, cette quantité augmente et quand on enlève quelque chose, celle-ci diminue ; quand on partage une quantité, il y en a moins.

Ces connaissances spontanées n'ont pas besoin d'être enseignées, elles sont disponibles. En revanche, c'est la compréhension du codage précis de la manipulation du système symbolique qui pose problème.

Ex. Les enfants de 3 à 5 ans voient des objets (cubes). On travaille avec des petites quantités (inférieures à 3) ou grandes (jusqu'à 8). Le problème est de passer d'un code verbal à une représentation imaginée. Lorsque les nombres sont plus grands que 3, les performances sont plus faibles d'où besoin de manipulations pour passer de 3 à 4, de 4 à 5...

Questions de l'auditoire :

Fonctionnement du système allemand qui associe la géométrie à la dénomination ?

Transformations analogiques et rapport avec le sens des opérations dont on parle en CM2 ?

Conseils par rapport à la mémoire à court terme ?

→ développer la fluidité du langage (par les comptines)

→ développer les activités visiospatiales

Quand introduire le zéro ? Intérêt du zéro ?

→ difficulté positionnelle

Y a-t-il une différence entre garçons et filles en arithmétique ? NON

Concrètement :

- travail sur la relation entre analogique et code
- utiliser plusieurs représentations qui permettent d'aller vers l'abstraction
- s'appuyer sur la ligne numérique

Les doigts présentent plusieurs qualités : bons outils pour visualiser le discret et la quantité, première forme d'abstraction, manipulation.